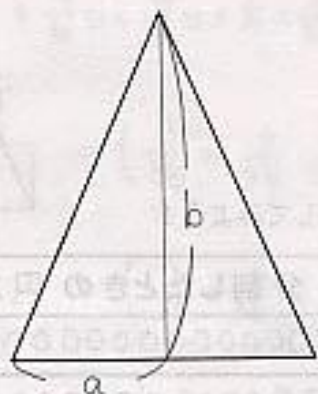


円すいの体積を求める

円すいの体積は $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ}$ であることは誰もが知っている。下の図のように、円すいを真横から見て考えることにする。



$$a \times a \times \pi \times b \times \frac{1}{3}$$

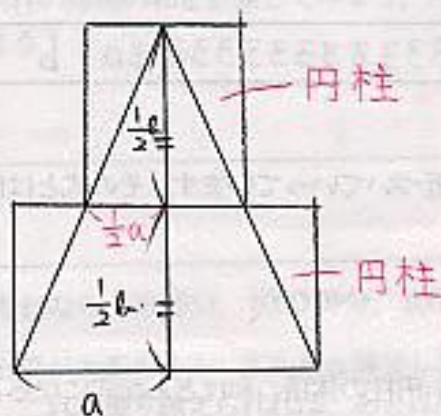
$$= \left(\frac{1}{3}\right) \pi a^2 b$$

前回 三角形の高さを等間隔に分割して、長方形を作り、長方形の面積の和を求めた。

演習0 三角すいの高さを等間隔に分割して、下図のように三角形の面積を求めたように長方形を作るが実際は長方形ではない。この図形は何か。

演習1 下の図を参照にして、高さを3等分、4等分、5等分、6等分長方形をかいていこう！

(例) 2等分したとき

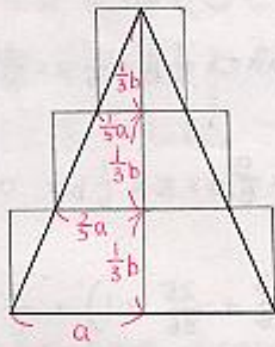


$$\frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} a \times \pi \times \frac{1}{2} b + a \times a \times \pi \times \frac{1}{2} b$$

$$= \left(\frac{1}{4} + 1\right) \times \frac{1}{2} \pi a^2 b$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{4}\right) \times \frac{1}{2} \pi a^2 b = \frac{1+4}{4} \times \frac{1}{2} \pi a^2 b = 0.625 \pi a^2 b$$

◎3等分したとき

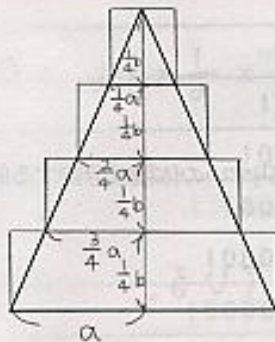


$$\frac{1}{3}a \times \frac{1}{3}a \times \pi \times \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}a \times \frac{2}{3}a \times \pi \times \frac{1}{3}b + a \times a \times \pi \times \frac{1}{3}b$$

$$= \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 1 \right) \times \frac{1}{3} \pi a^2 b$$

$$= \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{9}{9} \right) \times \frac{1}{3} \pi a^2 b$$

◎4等分したとき



$$\left(\frac{1}{4}a \times \frac{1}{4}a \times \pi \times \frac{1}{4}b + \left(\frac{2}{4}a \times \frac{2}{4}a \times \pi \times \frac{1}{4}b + \frac{3}{4}a \times \frac{3}{4}a \times \pi \times \frac{1}{4}b \right. \right.$$

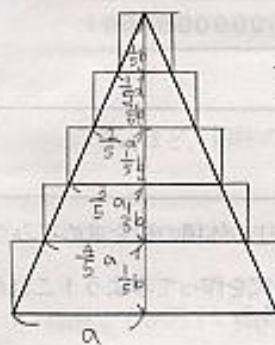
$$\left. + a \times a \times \pi \times \frac{1}{4}b \right)$$

$$= \left(\frac{1}{16} + \frac{8}{16} + \frac{9}{16} + 1 \right) \times \frac{1}{4} \pi a^2 b$$

$$= \left(\frac{1}{16} + \frac{8}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16} \right) \times \frac{1}{4} \pi a^2 b$$

$$= \left(\frac{1+8+9+16}{16} \right) \times \frac{1}{4} \pi a^2 b = 0.531 \dots \pi a^2 b$$

◎5等分したとき



$$\frac{1}{5}a \times \frac{1}{5}a \times \pi \times \frac{1}{5}b + \frac{2}{5}a \times \frac{2}{5}a \times \pi \times \frac{1}{5}b + \frac{3}{5}a \times \frac{3}{5}a \times \pi \times \frac{1}{5}b$$

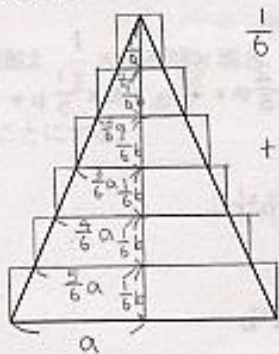
$$+ \frac{4}{5}a \times \frac{4}{5}a \times \pi \times \frac{1}{5}b + a \times a \times \pi \times \frac{1}{5}b$$

$$= \left(\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{9}{25} + \frac{16}{25} + 1 \right) \times \frac{1}{5} \pi a^2 b$$

$$= \left(\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{9}{25} + \frac{16}{25} + \frac{25}{25} \right) \times \frac{1}{5} \pi a^2 b$$

$$= \left(\frac{1+4+9+16+25}{25} \right) \times \frac{1}{5} \pi a^2 b = 0.44 \pi a^2 b$$

◎6等分したとき



$$\frac{1}{6}a \times \frac{1}{6}a \times \pi \times \frac{1}{6}b + \frac{2}{6}a \times \frac{2}{6}a \times \pi \times \frac{1}{6}b + \frac{3}{6}a \times \frac{3}{6}a \times \pi \times \frac{1}{6}b$$

$$+ \frac{4}{6}a \times \frac{4}{6}a \times \pi \times \frac{1}{6}b + \frac{5}{6}a \times \frac{5}{6}a \times \pi \times \frac{1}{6}b + a \times a \times \pi \times \frac{1}{6}b$$

$$= \left(\frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{9}{36} + \frac{16}{36} + \frac{25}{36} + 1 \right) \times \frac{1}{6} \pi a^2 b$$

$$= \left(\frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{9}{36} + \frac{16}{36} + \frac{25}{36} + \frac{36}{36} \right) \times \frac{1}{6} \pi a^2 b$$

$$= \left(\frac{1+4+9+16+25+36}{36} \right) \times \frac{1}{6} \pi a^2 b = 0.421 \dots$$

演習2

以上のようにして、円すいを円柱に分割してみました。円柱の体積の和と円すいの体積は分割する個数が増えるほど、どうなっていますか。

(解答)

細かく分割するほど、円すいに近づいている。

演習3

それでは円柱の体積の和を計算してみよう。円すいの半径を a 、高さを b としてみての面積の和をそれぞれ求めてみよう!

演習4 それなら100等分、1000等分、10000等分・・・したときの円柱の体積の和を求めてみたい。

しかし、計算が大変そう! だから n 等分したときの円柱の体積の和の公式を作ってみよう! これが一番難しいです。これが乗り越えられれば、あとは簡単です。一緒に作っていきましょう!

$$n \text{ 等分 } \frac{1+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^2} \times \frac{\pi a^2 b}{n} = \boxed{\left(1+2^2+3^2+\dots+n^2\right)} \times \frac{\pi a^2 b}{n^3}$$

$$= \frac{\pi(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{\pi a^2 b}{n^3} = \boxed{\frac{\pi(n+1)(2n+1)}{6n^3} \pi a^2 b}$$

- 。パソコン教室に来て、目が結構疲れたけど、
公式を解くことによって、大変楽しくなって
数学がもっと好きになりました。とても楽しい
授業でした。

公式ができあがったので、パソコンを使って計算してみよう！

円柱の分割数	分割したときの円柱の体積の和
10	0.385000000000000000000000 $\pi a^2 b$
100	0.338350000000000000000000 $\pi a^2 b$
1000	0.333833500000000000000000 $\pi a^2 b$
10000	0.333383335000000000000000 $\pi a^2 b$
100000	0.333338333350000000000000 $\pi a^2 b$
1000000	0.333333833333500000000000 $\pi a^2 b$
10000000	0.333333383333335000000000 $\pi a^2 b$
100000000	0.333333338333333350000000 $\pi a^2 b$
1000000000	0.33333333383333333350000000 $\pi a^2 b$
1000000000000	0.3333333333338333333333 $\pi a^2 b$

演習5

分割する個数が多いほど、円柱の体積の和の答えはある式に近づいていっています。その式とは何ですか

演習6

たとえば、理想ですが円すいを無限個の円柱に分割したとき、円柱の体積の和はどんな式になると思いますか。

$$0.3333 \dots \pi a^2 b = \frac{1}{3} \pi a^2 b$$

結論

無限個の3

円すいの体積は、無限個の円柱に分割して
足せばなる。

$$\frac{1}{3} \pi a^2 b$$