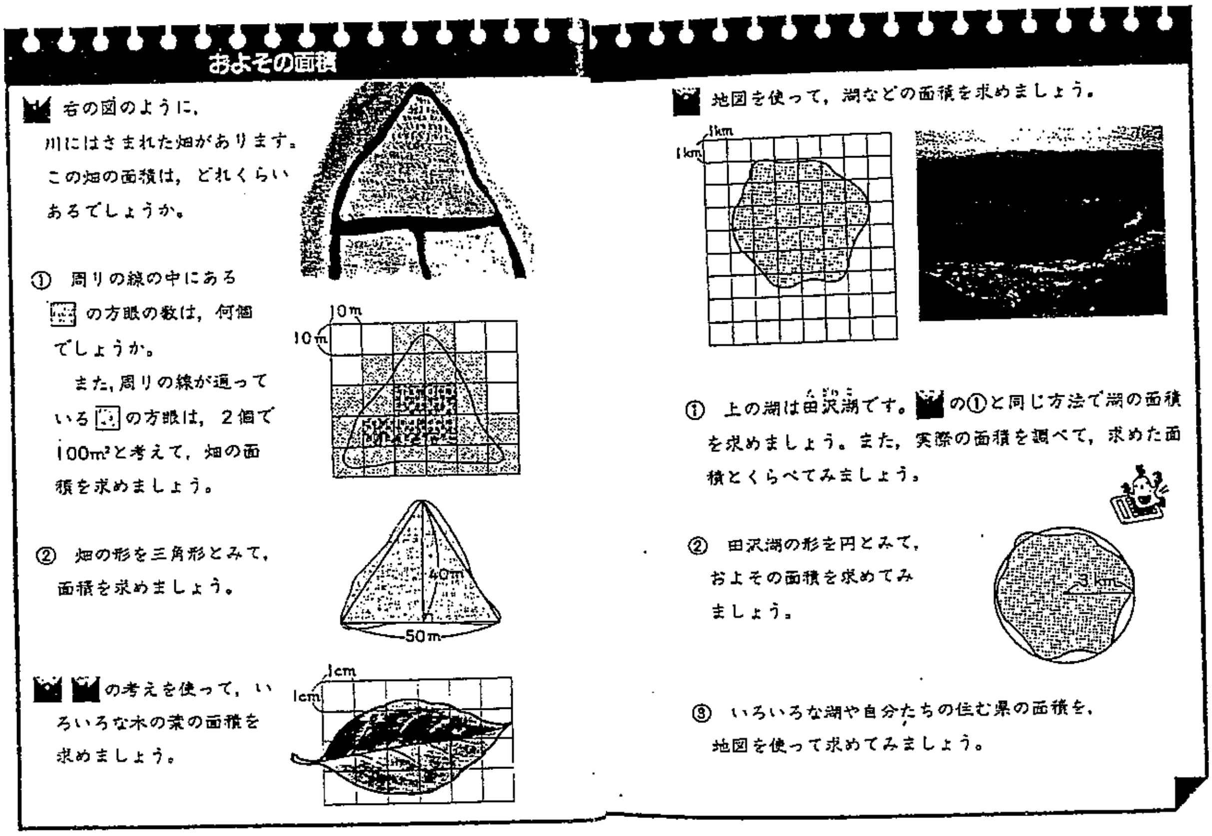
夏休み特別実験

積　分

－紀元前の測量を体験する－

高校２年

積分とは


およその面積

右の図のように，
川にはさまれた畑があります。
この畑の面積は，どれくらい
あるでしょうか。

① 周りの線の中にある
の方眼の数は，何個
でしょうか。
また，周りの線が通って
いるの方眼は，２個で
100m²と考えて，畑の面
積を求めましょう。

② 畑の形を三角形とみて，
面積を求めましょう。

の考えを使って，い
ろいろな木の葉の面積を
求めましょう。

地図を使って，湖などの面積を求めましょう。

① 上の湖は田沢湖です。の①と同じ方法で湖の面積
を求めましょう。また，実際の面積を調べて，求めた面
積とくらべてみましょう。

② 田沢湖の形を円とみて，
およその面積を求めてみ
ましょう。

③ いろいろな湖や自分たちの住む県の面積を，
地図を使って求めてみましょう。

学校図書　小学校算数６年下

積分は主に、高校２年生・３年生で学びます。積分とは読んで字のごとく、分けた物を積み上げるという意味です。この作業は紀元前のアルキメデスの時代から実際に利用されていたのでした。この分けた物を積み上げるという積分作業は、実は上記の絵を見ればわかるように、小学校で学んでいたのです。縁がゆがんだ領域の面積を求めるとき、正方形に区切って、その正方形の数を数えて、面積を求めたことがあると思います。正方形の大きさが小さければ小さいほど、求める面積が正確になったと思います。ニュートンとライプニッツという数学の天才がこの世に現れる１６００年代まで、こうして面積や体積を求めてきたのでした。この２人が分けた物を積み上げるという積分を一瞬で計算出来る定理を見つけたのでした。

それでは、小学校の時に学んだ積分をどうして高校でもう一度学ぶのでしょうか。それは、細かく分けてそれを積み上げるという作業が、一瞬で計算できてしまう、「微分積分の基本定理」という定理があり、それを学ぶためです。

今回は積分の出発点である、分けた物を積み上げるという「区分求積」という積分を実験したいと思います。君たちが過去の人たちの苦労を自ら体験して、また非常にめんどくさいという感想を持ってくれることと同時に、過去の天才数学者の発想に感動して感心してもらいたいと思います。

今回は円錐の体積を区分求積で求めたいと思います。そうすれば、どうして円すいの体積を求めるときに、係数の３分の１があるのか体験できると思います。

それでは、１週間がんばっていきましょう。

積分とは、細かく分けて、積み上げて、面積・体積を求めること。
（これは、細かいほど正確に近づく）

このような作業は、紀元前のアルキメデスの時代から利用されていた。しかし、1600年代に、ニュートンとライプニッツが、この作業を一瞬で計算できる定理を発見した。そのおかげで、計算するのが楽になったが、あえて僕達は、1600年代以前の方法でがんばります。

組　　番　氏名

和の公式の復習

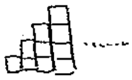
積分をきちんと勉強するには、数列をきちんと勉強しておかないといけません。まず数列の和の公式をしっかり復習することから始めます。

和の公式を求めるときは、教科書では式をうまくいじくりながら、和の公式を求めてきました。今回は夏休み特別実験ということで、パズル感覚で発見的学習の観点から、和の公式を楽しみながら(？)求めていきたいと思います。

積分を学ぶときに必要な和の公式は、$1+2+3+\cdots+n$，$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$，$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ の３つであるし，これだけ知っておけば十分です。

①$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}\cdot n(n+1)$

学んだこと

$1+2+3+\cdots+n$ をブロックみたいにしていく 

その上に、それと同じ形のものをひっくり返してのせて長方形にする 

その正方形のマスの個数は、$(n+1)\times n$ (たて×横) になる。

しかしそれは $2(1+2+3+\cdots+n)$ なので、$\frac{1}{2}$ をかけて半分にする。

そうすると

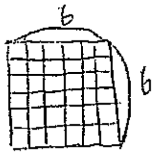
$$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$ になる。

②$1^3+2^3+3^3+\ \cdots+n^3$

$\boxed{\text{学んだこと}}$

$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$ の答えは必ず正方形になる。

例) $1^3+2^3=$ 

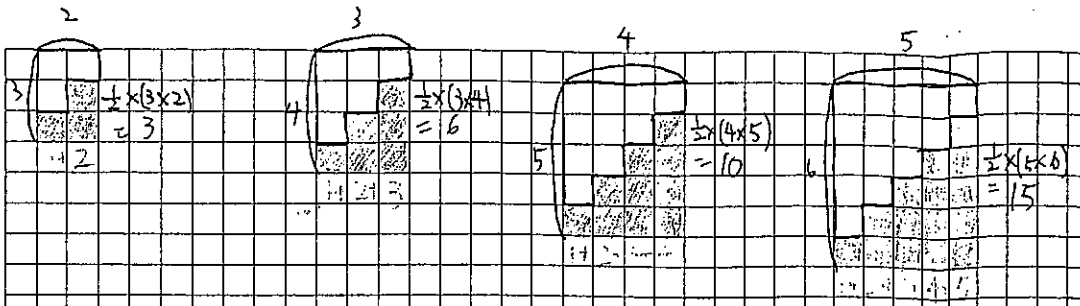
$1^3+2^3+3^3=$ 

というようになる。

この正方形の縦・横の長さは、1^3+2^3 のときは3、
$1^3+2^3+3^3$ のときは6 のように、$\frac{1}{2}n(n+1)$ になる。

なので、正方形の個数は、$\underbrace{\frac{1}{2}n(n+1)}_{\text{縦}}\times\underbrace{\frac{1}{2}n(n+1)}_{\text{横}}=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ になる。

よって $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$



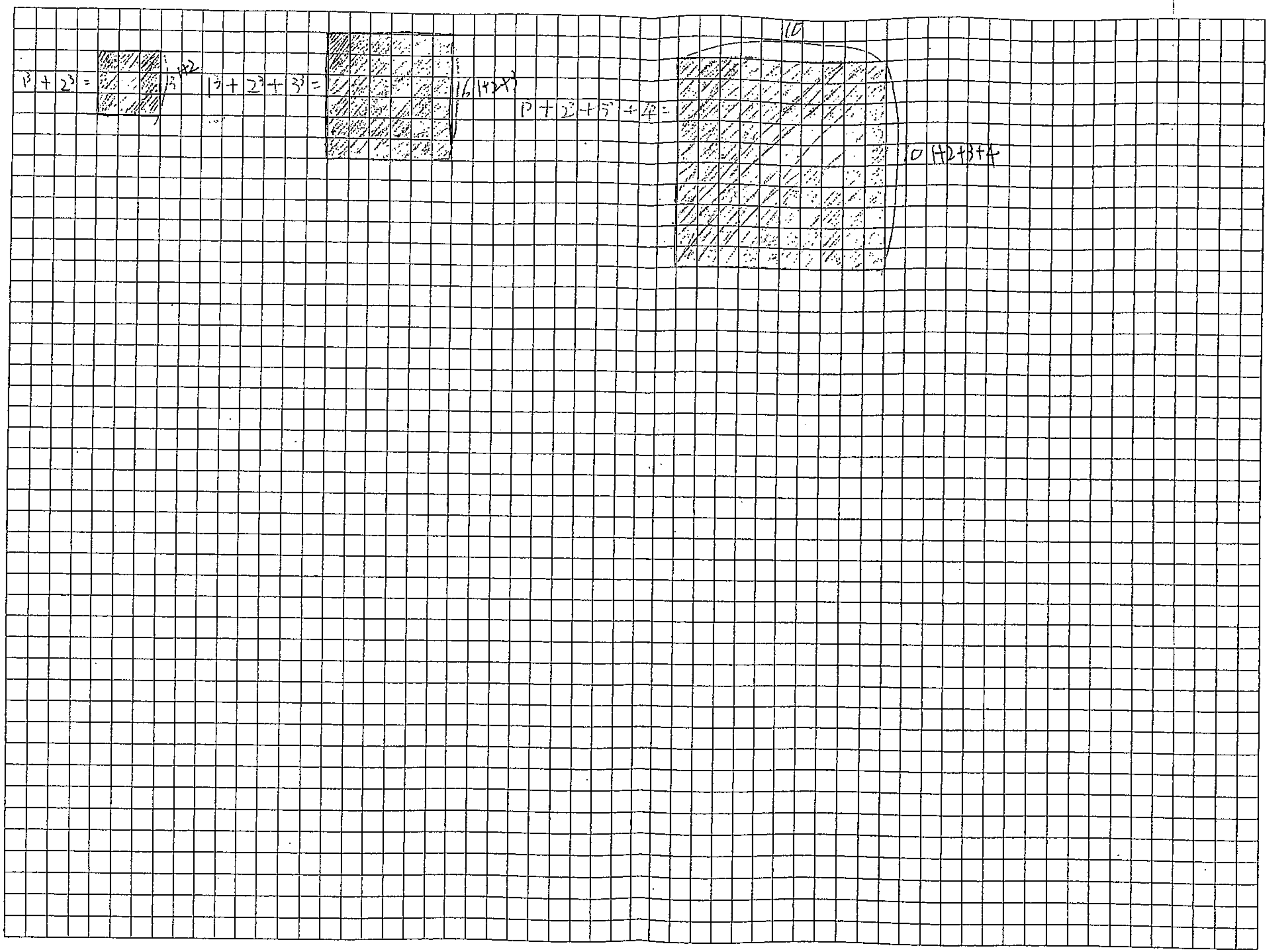
2
3
$\frac{1}{2}\times(3\times2)$
$=3$
1 2
3
4
$\frac{1}{2}\times(3\times4)$
$=6$
1 2 3
4
5
$\frac{1}{2}\times(4\times5)$
$=10$
5
6
$\frac{1}{2}\times(5\times6)$
$=15$

著
著

を追え」」(ほる

扱) 共著
ぶ出　著

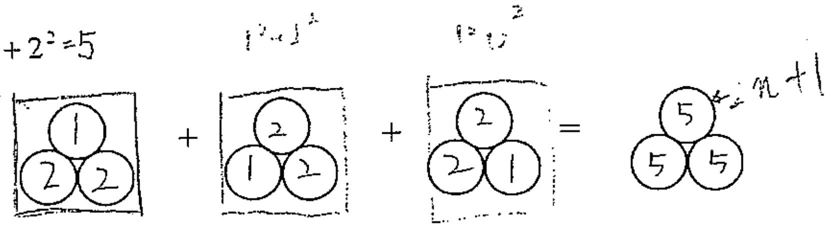
要



③$1^2+2^2+3^2+\ \cdots+n^2$

２乗の和の公式が一番最後ということに注意してください。なぜなら、２乗の公式の和だけ特別だからです。それを小学生にもわかるように展開していきましょう。

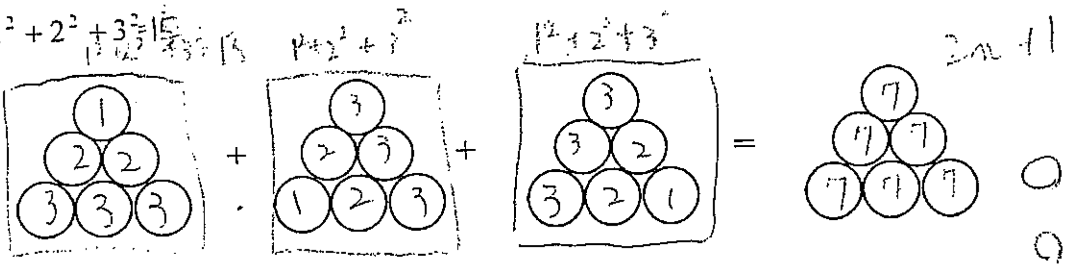
①$1^2+2^2=5$



○の数は $\frac{1}{2}\cdot2\times3=\underline{3}$

○の中の数は $2\cdot2+1=\underline{5}$

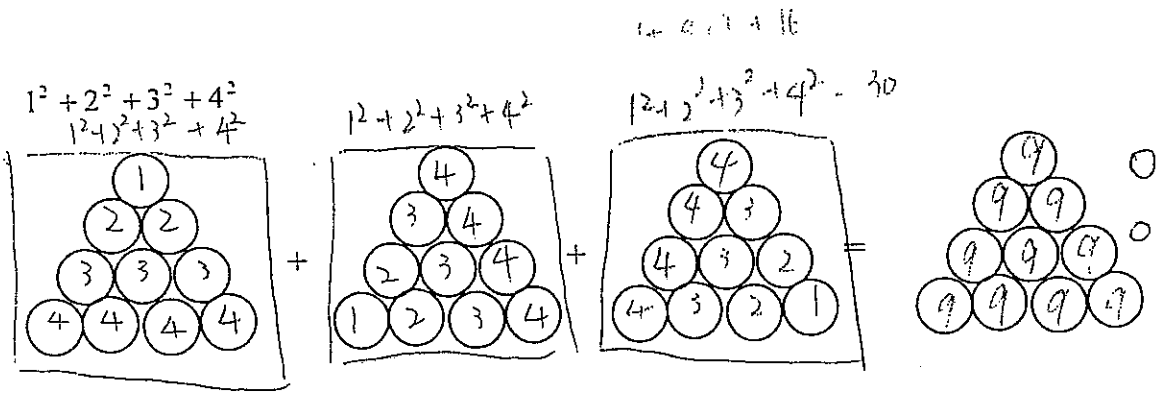
②$1^2+2^2+3^2$



○の数は $\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=\underline{6}$

○の中の数は $2\cdot3+1=\underline{7}$

③ $1^2+2^2+3^2+4^2$

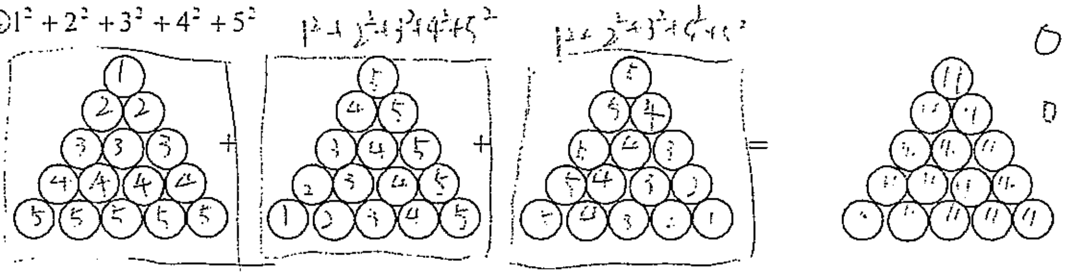


○の数は $\frac{1}{2}4\cdot5$

○の中の数は $2\cdot4+1$

$\cdots 10+6=55$

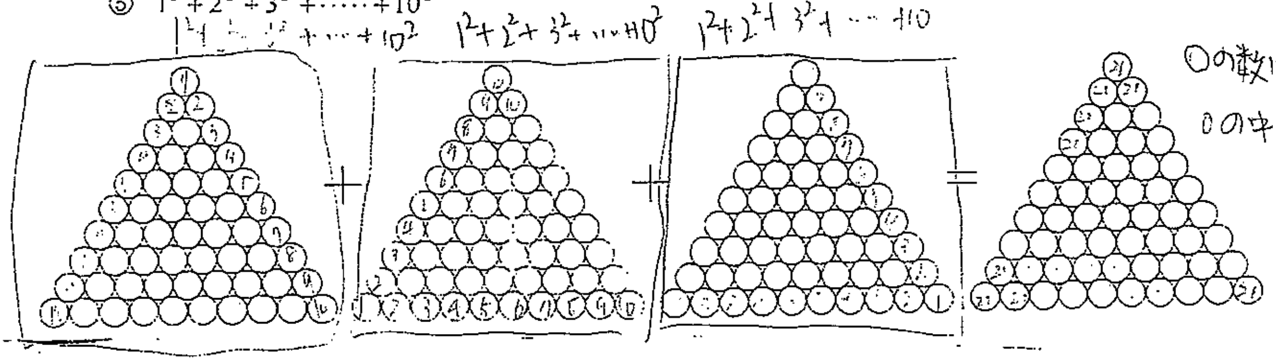
④ $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$



〇の数は $\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=\underline{15}$

〇の中の数は $2\cdot5+1=\underline{11}$

⑤ $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+10^2$

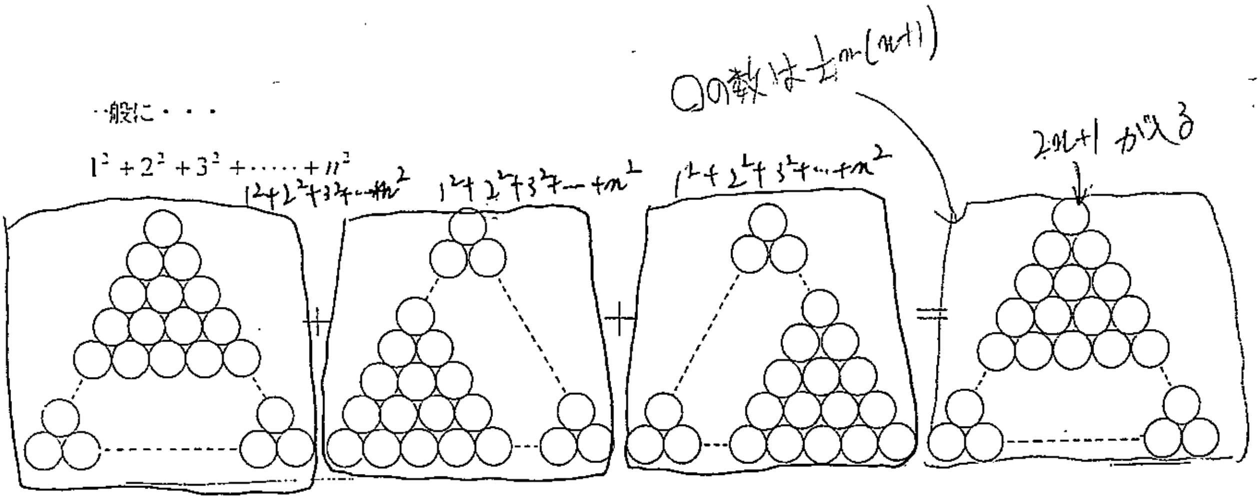


〇の数は $\frac{1}{2}\cdot10\cdot11=55$

〇の中の数は $2\cdot10+1=\underline{21}$

一般に・・・

$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$



$$3\times\underbrace{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)} = (2n+1)\times\underbrace{\tfrac{1}{2}n(n+1)}_{1+2+3+\cdots+n} \Rightarrow 和$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

公式の確認

$1+2+3+\cdots\cdots+n$

$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$

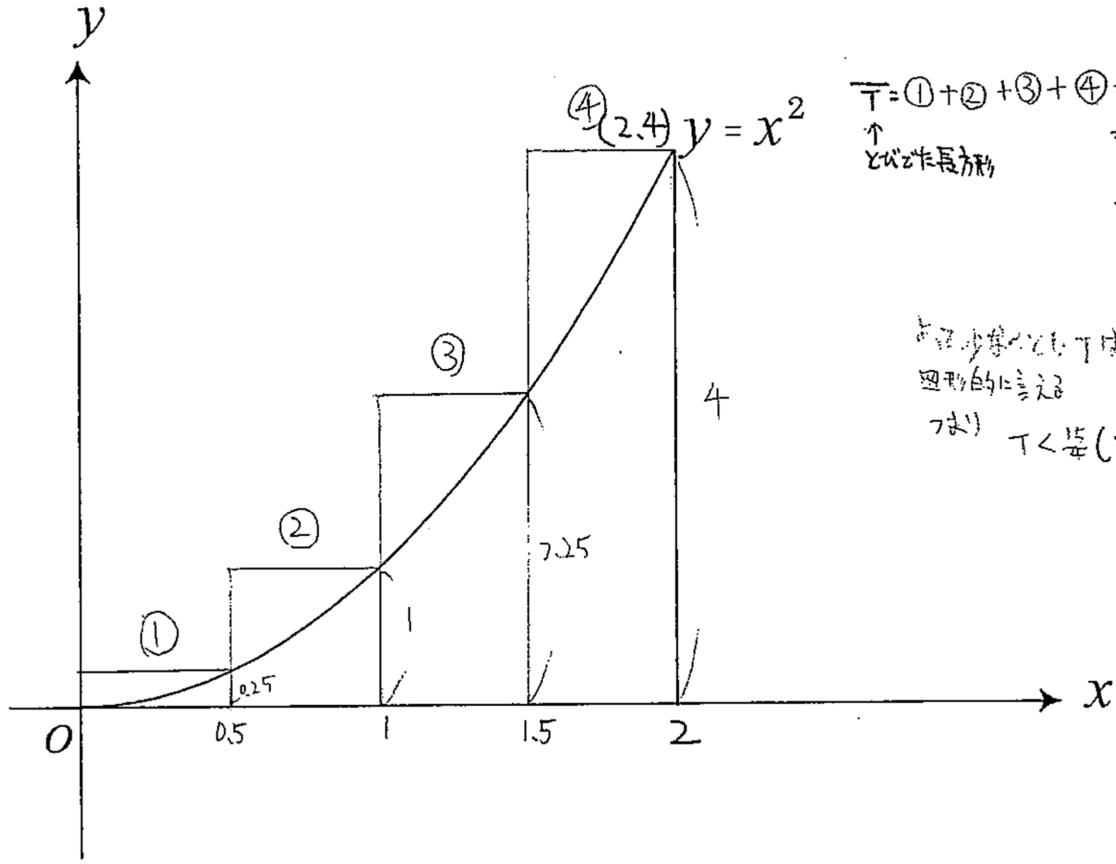
$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$

２次関数と x 軸で囲まれる面積

■　これらの公式を利用して、まずは $x=0$ から $x=2$ までの $y=x^2$ と x 軸で囲まれた面積を紀元前の人が行っていた方法で求めていくことにしよう！

(i)
~~①~~4等分~~(右)~~(上)

$y=x^2$ と x 軸で囲まれる $x=0$ から $x=2$ までの面積を T とする。



$\overline{T}$ = ① + ② + ③ + ④ $= 0.5 \times (0.25+1+2.25+4)$

↑
とびでた長方形

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}+4\right)$

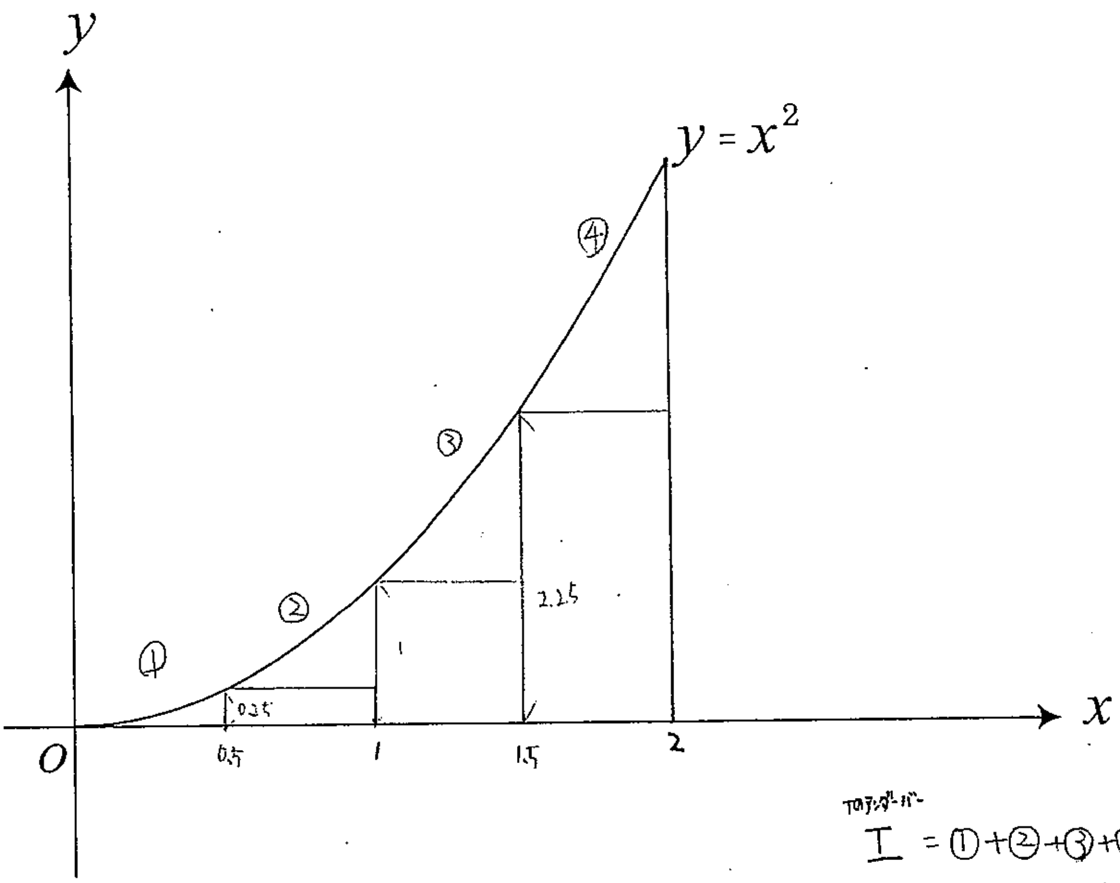
$= \frac{1}{2} \times \frac{1+4+9+16}{4}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{30}{4} = \frac{15}{4}$

よって少なくとも T は $\frac{15}{4}$ より小さいことが図形的に言える

つまり　$T < \frac{15}{4}$ $(T < \overline{T})$

(ii) ~~②~~ 4等分(~~左~~)下



Tのアンダーバー

$\underline{T}$ = ①+②+③+④

$= 0 + 0.5 \times \left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4}\right)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1+4+9}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{14}{4} = \frac{7}{4}$

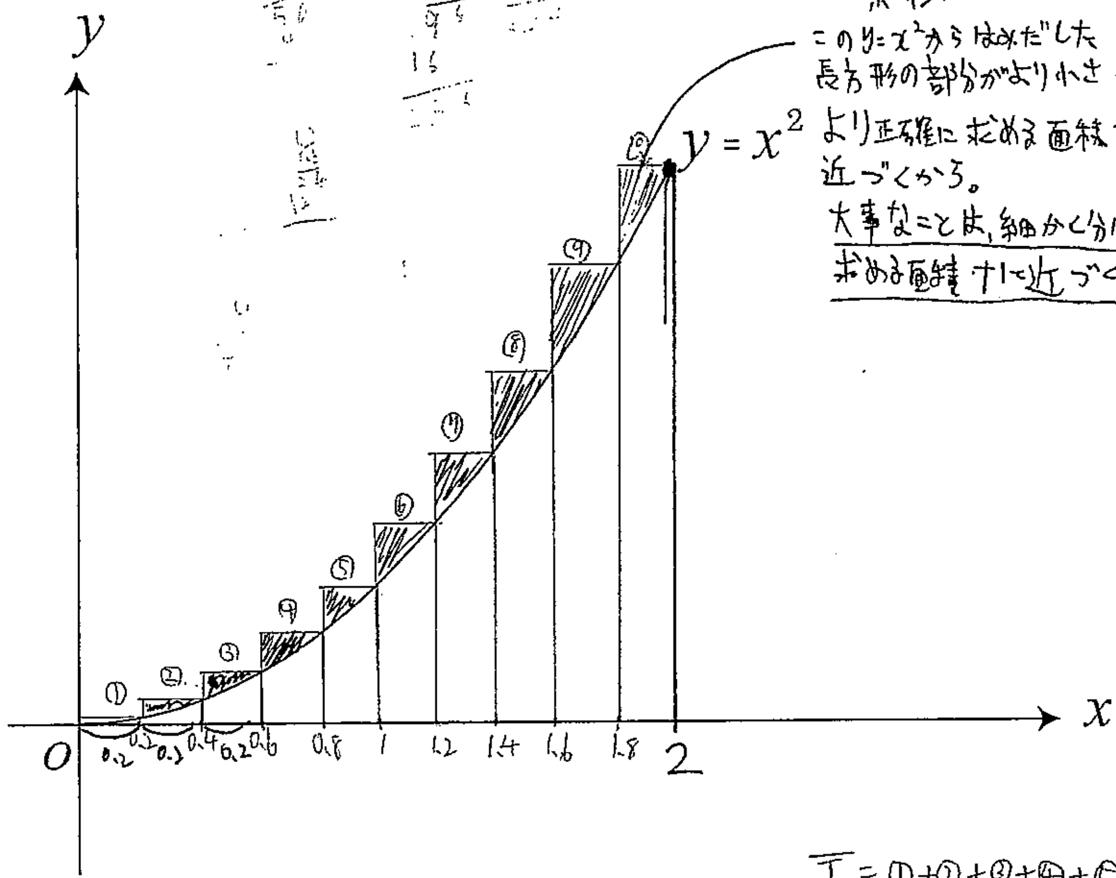
よって Tの方が $\underline{T}\left(=\frac{7}{4}\right)$ より大きいことが図形的に証明された

つまり $\frac{7}{4} < T$ $(\underline{T} < T)$ が成り立つ

以上(i)(ii)より求める面積は、

$\frac{7}{4} < T < \frac{15}{4}$ ということが言える

(iii)
10等分(右)



ポイント
この $y = x^2$ からはみだした長方形の部分がより小さくなってより正確に求める面積Tに近づくから。
大事なことは、細かく分けるほど、求める面積Tに近づく

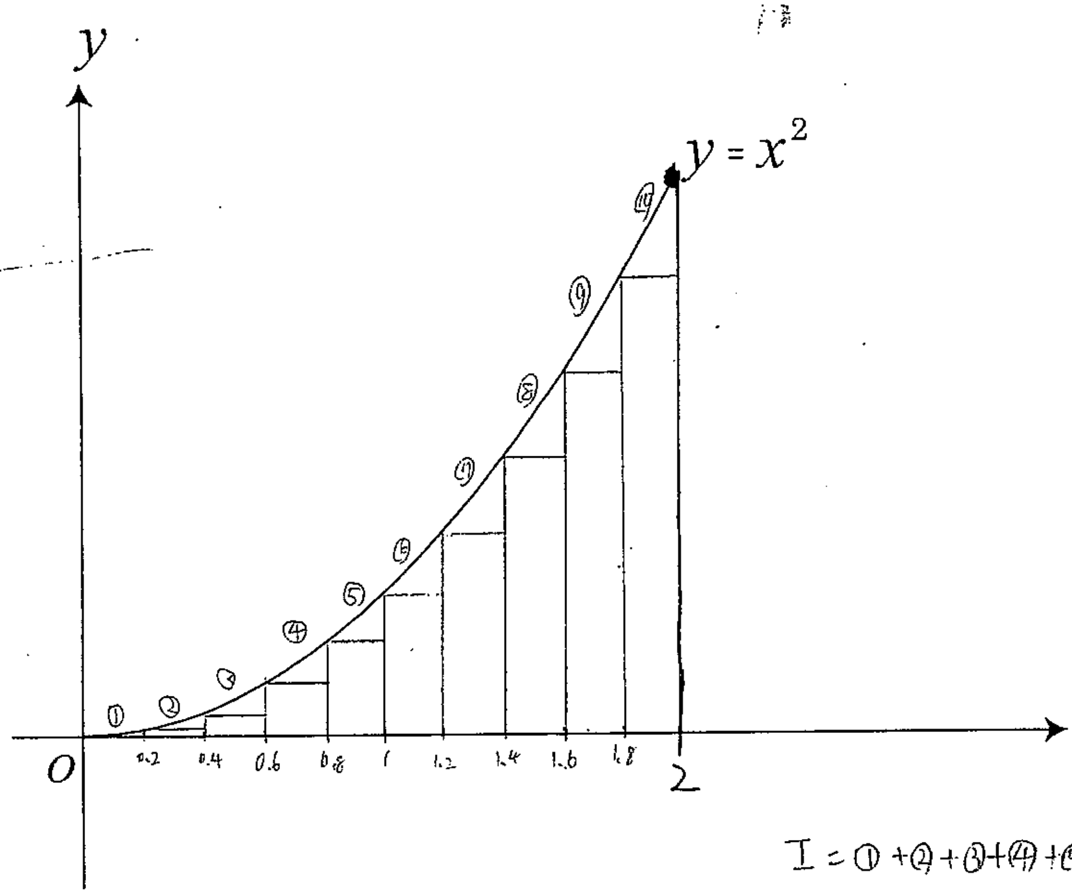
0.04
0.16
0.36
0.64
1
1.44
1.96
2.56
3.24
4

15.40

$\overline{T} = ①+②+③+④+⑤+⑥+⑦+⑧+⑨+⑩$
$= 0.2 \times (0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.64 + 1 + 1.44 + 1.96 + 2.56 + 3.24 + 4)$
$= 0.2 \times 15.40 = \frac{1}{5} \times 15.4 = 3.08 = \frac{77}{25}$

$T < \frac{77}{25}$ $(T < \overline{T}_{10})$

(iv)
~~④~~ １０等分~~(左)~~
下



$\underline{T} = ① + ② + ③ + ④ + ⑤ + ⑥ + ⑦ + ⑧ + ⑨ + ⑩$

$= 0.2 \times (0 + 0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.64 + 1 + 1.44 + 1.96 + 2.56 + 3.24)$

$= 0.2 \times 11.40$

$= \frac{1}{5} \times 11.40 = 2.28 = \frac{57}{25}$

$T > \frac{57}{25}$ $(T > \underline{T_{10}})$

よって図形的にTの方が$\underline{T_{10}}$より大きいことが証明された。

(iii)(iv)より $\underline{T_{10}} < T < \overline{T_{10}}$

$\frac{57}{25} < T < \frac{77}{25}$

がいえる

(i)(ii)(iii)(iv)より

$\underline{T_4} < \underline{T_{10}} < T < \overline{T_{10}} < \overline{T_4}$

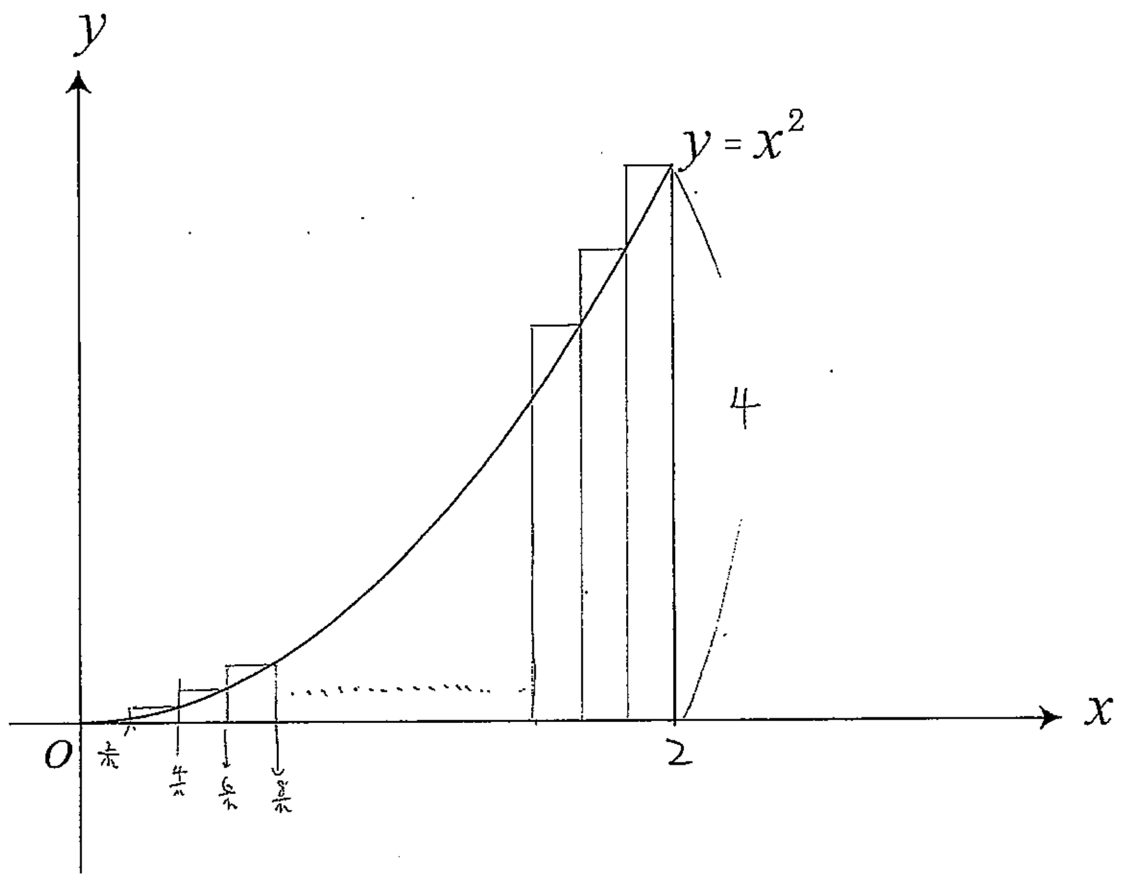
なぜなら $\frac{7}{4} < \frac{57}{25} < T < \frac{77}{25} < \frac{15}{4}$

つまり

$\frac{175}{100} < \frac{228}{100} < T < \frac{308}{100} < \frac{375}{100}$

よって確かに細かく分けて足した方がより求める面積Tに近づいていることが言えた。

(V) ~~⑤~~ n等分(~~右~~ 上) = n等分したときのT_nの公式を作る



$$T_n = \underbrace{\frac{2}{n}}_{\text{長方形の横の長さ}} \times \left(\frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^2} + \frac{36}{n^2} + \cdots\cdots + 4\right)$$

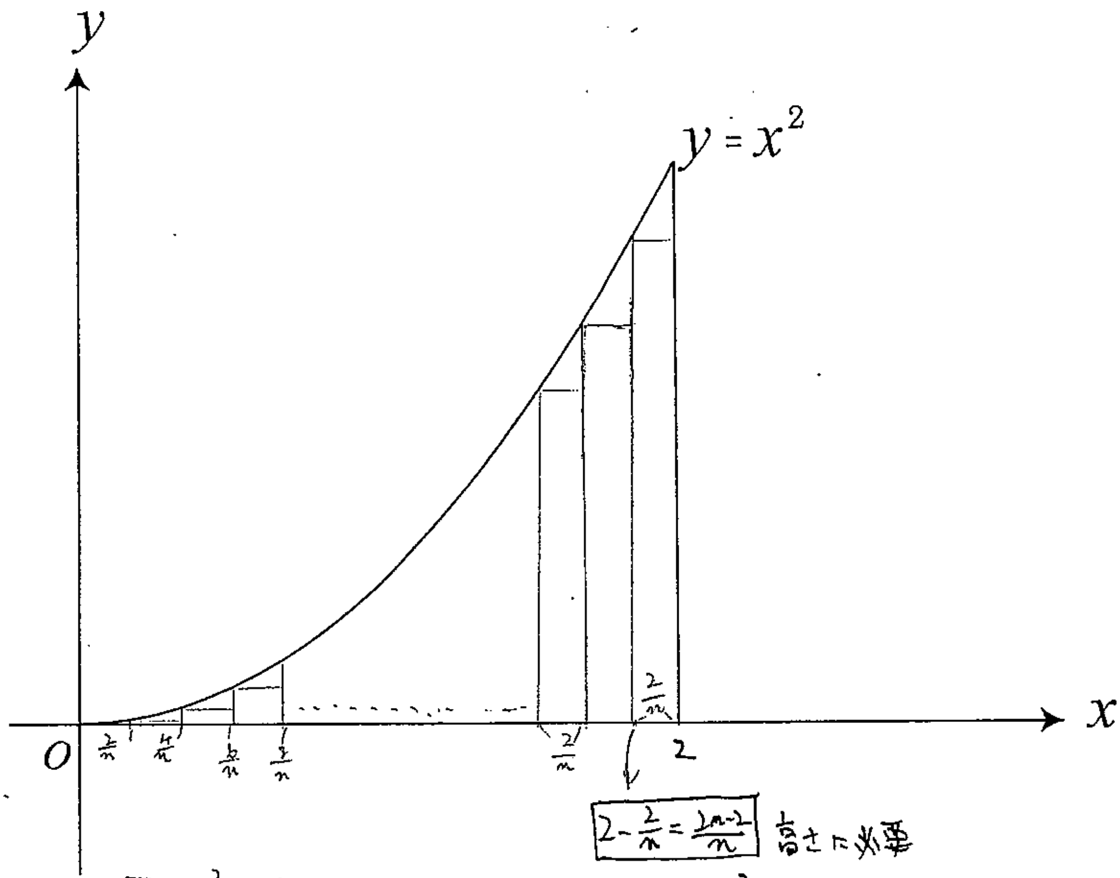
$$= \frac{2}{n} \times \left(\frac{4+16+36+\cdots\cdots+4n^2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{2}{n^3} \times (\underbrace{4+16+36+\cdots\cdots+4n^2}_{\Sigma\text{でかく}})$$

$$= \frac{2}{n^3} \times \sum_{k=1}^{n} 4k^2 = \frac{8}{n^3} \times \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{n^3} \times \frac{1}{\cancel{6}_{3}} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

(vi)
⑯n等分(左)：n等分したときの $\underline{T_n}$ の公式を作る.



$$\underline{T_n} = \frac{2}{n} \times \left\{ 0 + \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^2} + \frac{36}{n^2} + \cdots\cdots + \frac{(2n-2)^2}{n^2} \right\}$$

$$= \frac{2}{n} \times \left\{ \frac{0+4+16+36+\cdots\cdots+(2n-2)^2}{n^2} \right\}$$

$$= \frac{2}{n^3} \times \underbrace{\{0+4+16+36+\cdots+(2n-2)^2\}}_{\Sigma で かく}$$

$$= \frac{2}{n^3} \times \sum_{k=1}^{n} (2k-2)^2 = \frac{2}{n^3} \times \sum_{k=1}^{n} 4(k-1)^2 = \frac{8}{n^3} \times \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$$

$$= \frac{8}{n^3} \times \{0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\} = \frac{8}{n^3} \times \{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\}$$

$$= \frac{8}{n^3} \times \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{8}{n^3} \times \frac{1}{6}(n-1) \cdot n \cdot \{2(n-1)+1\}$$

$$= \frac{\cancel{8}\,4}{\cancel{n^3}\,n^2} \times \frac{1}{\cancel{6}\,3} \times (n-1) \times n \times (2n-1)$$

$$= \frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2}$$

以上より $\underline{T_n} < T < \overline{T_n}$ が言えるから

$$\frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2} < T < \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

が成り立つ。

=x^2とx軸で囲まれるx＝0からx＝2までの面積

20等分した長方形の面積の和(上)

x座標	横の長さ	縦の長さ	長方形の面積
0.1	0.1	0.01	0.001
0.2	0.1	0.04	0.004
0.3	0.1	0.09	0.009
0.4	0.1	0.16	0.016
0.5	0.1	0.25	0.025
0.6	0.1	0.36	0.036
0.7	0.1	0.49	0.049
0.8	0.1	0.64	0.064
0.9	0.1	0.81	0.081
1	0.1	1	0.1
1.1	0.1	1.21	0.121
1.2	0.1	1.44	0.144
1.3	0.1	1.69	0.169
1.4	0.1	1.96	0.196
1.5	0.1	2.25	0.225
1.6	0.1	2.56	0.256
1.7	0.1	2.89	0.289
1.8	0.1	3.24	0.324
1.9	0.1	3.61	0.361
2	0.1	4	0.4

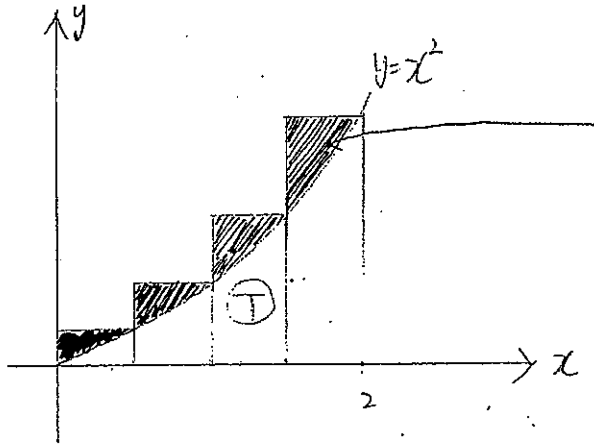
長方形の面積(2.87

20等分した長方形の面積の和(下)

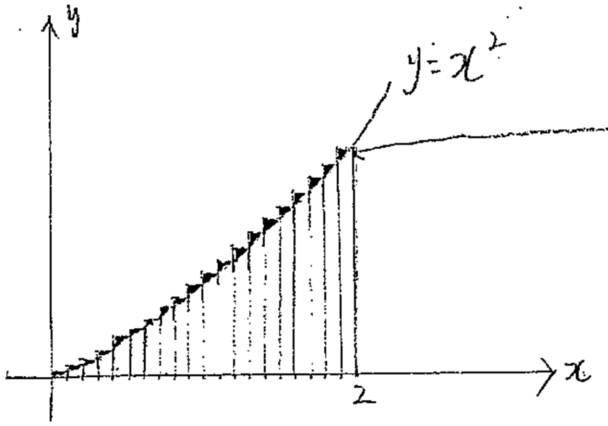
x座標	横の長さ	縦の長さ	長方形の面積
0	0.1	0	0
0.1	0.1	0.01	0.001
0.2	0.1	0.04	0.004
0.3	0.1	0.09	0.009
0.4	0.1	0.16	0.016
0.5	0.1	0.25	0.025
0.6	0.1	0.36	0.036
0.7	0.1	0.49	0.049
0.8	0.1	0.64	0.064
0.9	0.1	0.81	0.081
1	0.1	1	0.1
1.1	0.1	1.21	0.121
1.2	0.1	1.44	0.144
1.3	0.1	1.69	0.169
1.4	0.1	1.96	0.196
1.5	0.1	2.25	0.225
1.6	0.1	2.56	0.256
1.7	0.1	2.89	0.289
1.8	0.1	3.24	0.324
1.9	0.1	3.61	0.361

長方形の面積(2.47

結果　この結果から、少なくとも面積Tは、2.47＜T＜2.87がいえる



4等分の場合。
ここの部分の差が大きい。
よって、Tの値の範囲が広すぎて、
Tの値が定まらない。



10等分の場合。
ここの部分の差が4等分の時より
小さくなっている。

このように、n等分するとき、nの値を
大きくすればするほど、正解に限り
なく近づける。

$$\frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2} < T < \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

今日はこれで値をしぼる。

n等分した長方形の面積の和の公式を使って面積Tを求める

面積Tは次の大きさの間にある

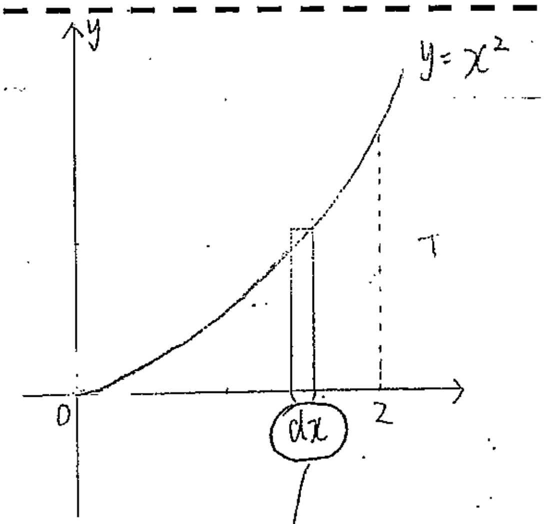
$$\frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2} < T < \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

当てはめていくと・・・・・・・

n等分	下の面積	＜	T	＜	上の面積
15	2.405925926	＜	T	＜	2.939259259
100	2.6268	＜	T	＜	2.7068
200	2.6467	＜	T	＜	2.6867
300	2.653348148	＜	T	＜	2.680014815
400	2.656675	＜	T	＜	2.676675
500	2.658672	＜	T	＜	2.674672
600	2.660003704	＜	T	＜	2.673337037
700	2.660955102	＜	T	＜	2.672383673
800	2.66166875	＜	T	＜	2.67166875
900	2.662223868	＜	T	＜	2.671112757
1000	2.662668	＜	T	＜	2.670668
2000	2.664667	＜	T	＜	2.668667
3000	2.665333481	＜	T	＜	2.668000148
4000	2.66566675	＜	T	＜	2.66766675

となる

2次関数とx軸で囲まれた部分の面積Tを求めるために、Tよりも面積が大きいのと小さいn等分した長方形の面積の和の範囲を調べてみた。
初めは4等分で計算したが、それではまだ面積Tの範囲が広すぎるので10等分、20等分と試してみたが、それでも面積Tを確定することはできなかった。そこでn等分した面積の和の公式を導き出し、nに大きな数字を代入していった。
以上の結果から、Tは2.666だとわかった。10000等分ぐらいしないと正確な値は分からないだろうと思っていたから、4000等分で正確な値が出たのは意外だった。
「n等分した長方形の面積の和の公式」を使って、面積Tの値を調べるのが今日の目的だったが、達成できたように思える。エクセルを使うとこれほど簡単に計算できることに感動してしまった。そして、僕はパソコンを使うのが苦手だけど、エクセルの作業は楽しみながらできたから、とてもよかった。罫線を入れたりする作業もおもしろかった。



面積Tを求めるときは細かくきざんだ長方形をたすほど正確にでた約2.66になることがわかった。

dxが非常に小さい（0の一歩手前）

$dx \Rightarrow 0.1^{1兆} > 0.1^{1000兆}$ ※dxはこれよりも小さい。

dは差という意味

この面積Tは

$\underbrace{\underset{たて}{x^2}\,\underset{横}{dx}}_{長方形の面積}$ を $x=0$ から $x=2$ まで足す

Sum

↓ひきのばして

$\int$

数学の世界

$$T = \int_0^2 \underbrace{x^2\,dx}_{長方形の面積}$$

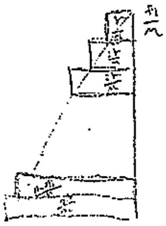
積分の記号 とかく。

円錐の体積

半径r，高さhの円すいの体積は$\frac{1}{3}\pi hr^2$で与えられるが，どうしてこのような式で与えられるのか，積分して求めることにする

V

(A)　n等分した円柱の体積の和　(外)



$y : \frac{h}{n} = r : h$

$y = \frac{r}{n}$

$z : \frac{2h}{n} = r : h$

$z = \frac{2r}{n}$

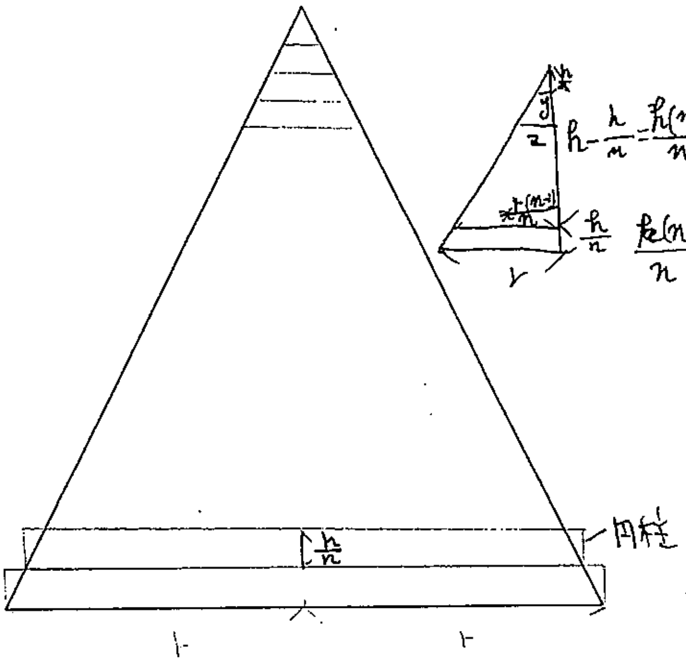
$h - \frac{h}{n} = \frac{h(n-1)}{n}$

$\frac{h}{n}$

$\frac{h(n-1)}{n} : x = h : r$

$x = \frac{h(n-1)}{n} \times r \div h$

$= \frac{r(n-1)}{n}$



$$V_n = \underbrace{\left(\frac{r}{n}\right)^2 \times \pi \times \frac{h}{n}}_{一番上} + \underbrace{\left(\frac{2r}{n}\right)^2 \times \pi \times \frac{h}{n}}_{上から2番目} + \underbrace{\left(\frac{3r}{n}\right)^2 \times \pi \times \frac{h}{n}}_{上から3番目} + \cdots\cdots + \underbrace{\left(\frac{(n-1)r}{n}\right)^2 \times \pi \times \frac{h}{n}}_{上から(n-1)番目} + \underbrace{r^2 \times \pi \times \frac{h}{n}}_{上から n番目}$$

$$= \frac{\pi h}{n} \times \left(\frac{r^2}{n^2} + \frac{4r^2}{n^2} + \frac{9r^2}{n^2} + \cdots\cdots + \frac{(n-1)^2 r^2}{n^2} + r^2\right)$$

$$= \frac{\pi h}{n} \times \frac{r^2 + 4r^2 + 9r^2 + \cdots\cdots (n-1)^2 r^2 + n^2 r^2}{n^2}$$

$$= \frac{\pi r^2 h}{n^3} \times \underline{(1 + 4 + 9 + \cdots + (n-1)^2 + n^2)}$$

$$= \frac{\pi r^2 h}{n^3} \times \sum_{k=1}^{n} k^2$$

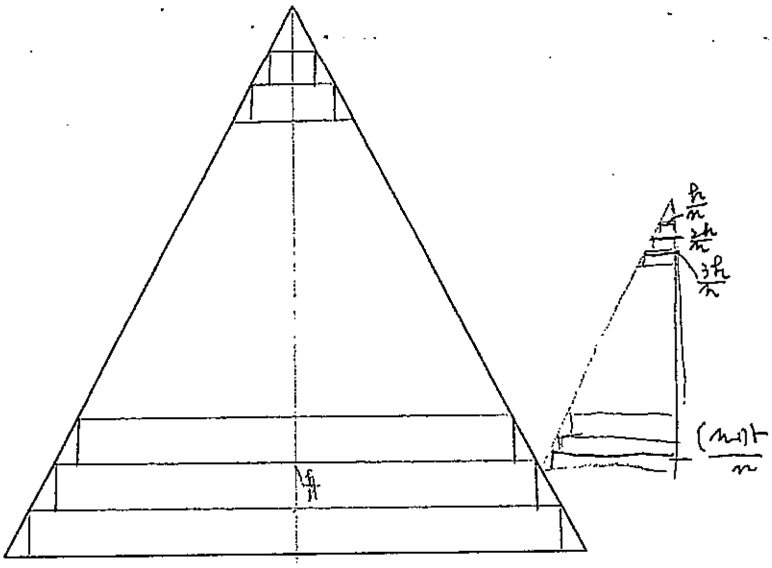
$$= \frac{\pi r^2 h}{n^3} \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{\pi r^2 h(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

図形的には

$$V < \frac{\pi r^3 h(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

(B)　n等分した円柱の体積の和　(内)



$$V_n = \underbrace{\left(\frac{r}{n}\right)^2 \times \frac{h}{n} \times \pi}_{\text{上から1番目}} + \underbrace{\left(\frac{2r}{n}\right)^2 \times \frac{h}{n} \times \pi}_{\text{上から2番目}} + \cdots\cdots + \underbrace{\left(\frac{(n-1)r}{n}\right)^2 \times \frac{h}{n} \times \pi}_{\text{上から}(n-1)\text{番目}}$$

$$= \frac{\pi h}{n} \times \left(\frac{r^2}{n^2} + \frac{4r^2}{n^2} + \cdots\cdots + \frac{(n-1)^2 r^2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\pi r^2 h}{n^3} \times \{1 + 4 + \cdots + (n-1)^2\}$$

$$= \frac{\pi r^2 h}{n^3} \times \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= \frac{\pi r^2 h}{n^3} \times \frac{1}{6}(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)$$

$$= \frac{\pi r^2 h (n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

図形的に $V_n < V$

つまり $\frac{\pi r^2 h (n-1)(2n-1)}{6n^2} < V$

が成り立つ。

(A) (B) より 円すいの体積 V は

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \pi r^2 h < V < \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \pi r^2 h$$

が成り立つ。

n等分した円柱の体積の和の公式を使って円錐の体積Vを求める

体積Vは次の大きさの間にある

$$\boxed{\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\pi r^2 h < V < \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\pi r^2 h}$$

nに数字を当てはめていくと・・・

n等分	内側の体積		<	V	<	外側の体積	
100	0.32835	πr^2h	<	V	<	0.33835	πr^2h
1000	0.3328335	πr^2h	<	V	<	0.3338335	πr^2h
10000	0.333283335	πr^2h	<	V	<	0.333383335	πr^2h
100000	0.333328333	πr^2h	<	V	<	0.333338333	πr^2h
1000000	0.333332833	πr^2h	<	V	<	0.333333833	πr^2h
10000000	0.333333283	πr^2h	<	V	<	0.333333383	πr^2h
25000000	0.333333313	πr^2h	<	V	<	0.333333353	πr^2h
50000000	0.333333323	πr^2h	<	V	<	0.333333343	πr^2h
75000000	0.333333327	πr^2h	<	V	<	0.33333334	πr^2h
100000000	0.333333328	πr^2h	<	V	<	0.333333338	πr^2h
125000000	0.333333329	πr^2h	<	V	<	0.333333337	πr^2h
150000000	0.33333333	πr^2h	<	V	<	0.333333337	πr^2h
175000000	0.33333333	πr^2h	<	V	<	0.333333336	πr^2h
200000000	0.333333331	πr^2h	<	V	<	0.333333336	πr^2h
225000000	0.333333331	πr^2h	<	V	<	0.333333336	πr^2h
250000000	0.333333331	πr^2h	<	V	<	0.333333335	πr^2h
275000000	0.333333332	πr^2h	<	V	<	0.333333335	πr^2h
300000000	0.333333332	πr^2h	<	V	<	0.333333335	πr^2h
325000000	0.333333332	πr^2h	<	V	<	0.333333335	πr^2h
350000000	0.333333332	πr^2h	<	V	<	0.333333335	πr^2h

となる

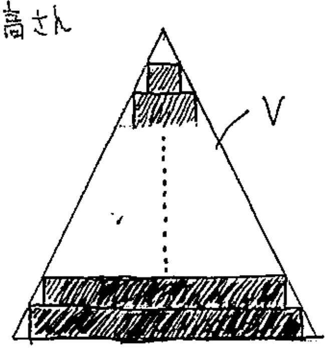
半径r、高さhの円すいの体積がなぜ$\boxed{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$になるのかを積分して求めてみる。

円すいの体積をn等分した円柱の体積の和と考えると、内側にできる場合$\boxed{\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\pi r^2 h}$と、外側にできる場合$\boxed{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\pi r^2 h}$とがある。

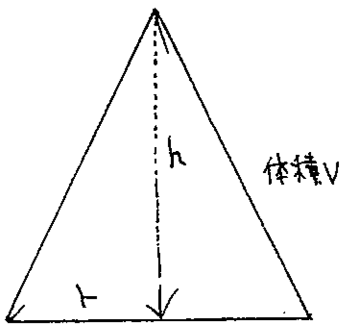
体積Vの範囲は$\boxed{\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\pi r^2 h < V < \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\pi r^2 h}$となる。

Nに代入する数字が小さいと、体積Vの範囲が広すぎるので、nに代入する数字を大きくしていくと、およそVの値は0.33333になることがわかった。

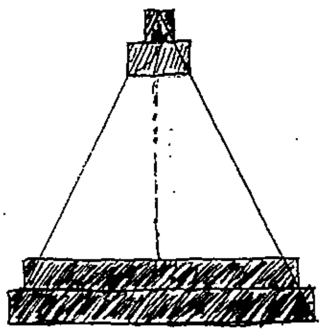
半径r, 高さh



内側の円柱の体積
$\frac{(n-1)(2n-1)}{}\pi r^2 h$ /



円すいの体積
V /



外側の円柱の体積
$\frac{(n+1)(2n+1)}{}\pi r^2 h$

極限

n 等分した面積の和の公式の極限を求めて見ましょう

極限とは・・・

$\frac{1}{n}$ で n を大きくする

$n=1, 10, 20, 30, \cdots 100 \cdots$

$\frac{1}{n}$ は $1, 0.1, 0.05, 0.033, \cdots 0.01 \cdots$

n を大きくすると $\frac{1}{n}$ は 0 に近づいていく

$\Downarrow$

$\boxed{\underset{\text{無限}}{n \Rightarrow \infty} \Rightarrow \underset{\text{近づく}}{\frac{1}{n} \to 0}}$ or $\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \fallingdotseq 0}$

lim の記号による

円すいの体積 V は

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\pi r^2 h < V < \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\pi r^2 h$$

n を限りなく大きくする $\Rightarrow$ V は正確

$$\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\pi r^2 h < V < \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}\pi r^2 h$$

$$\left(\frac{1}{3} - \underbrace{\frac{1}{2n}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{6n^2}}_{0}\right)\pi r^2 h < V < \left(\frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{6n^2}}_{0}\right)\pi r^2 h$$

$n \to \infty$ にする

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h < \boxed{V} < \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$\Downarrow$

$\boxed{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$

$\downarrow$

∞個に分割した
円柱の和
（理想の数字）

円周率の計算

昨年の東大の大学入試に次のような問題が出た

「円周率が 3.04 より大きいことを証明せよ」

この問題は君たちの知識で解くことが出来るが、ここも細かく分けて近似するという今回の特別実験の内容で考えることが出来る。ただし、気をつけることは、分けて積み上げることはしないので、積分ではないことに注意する。
「 円周率＝円周の長さ÷直径の長さ 」で定義されて、ここでは半径の長さを１とする.

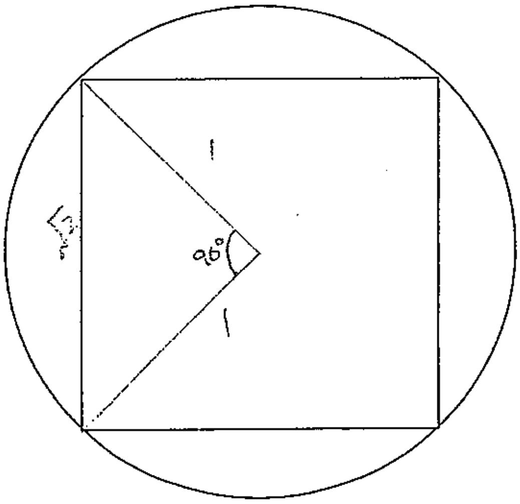
円周率の求め方

18782 + 18782
=
37564

3

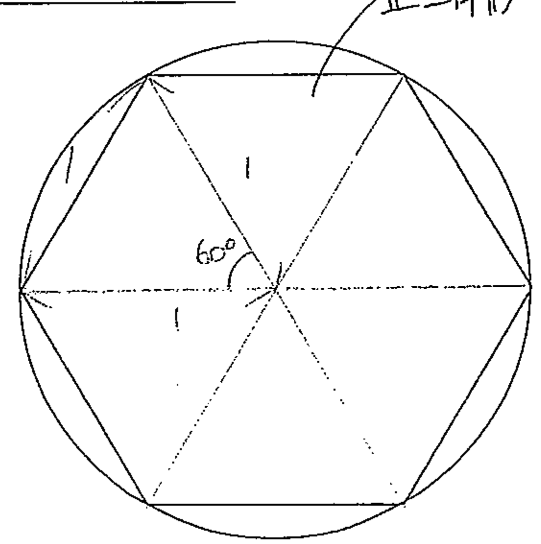
VIVA 3.14

四角形の内接



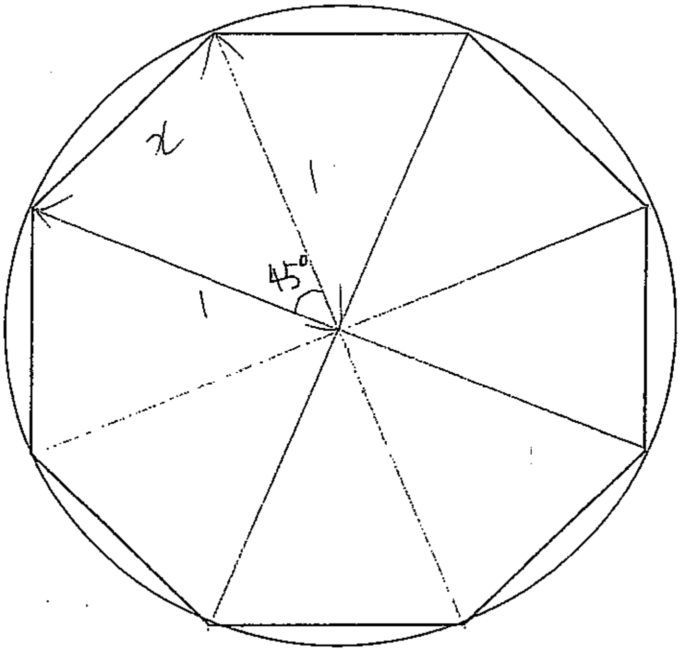
円周≒$4\sqrt{2}$
直径2
円周率$=4\sqrt{2}\div2$
$=2\sqrt{2}=2\times1.41$
$=2.82$

六角形の内接



円周≒6
円周率$=6\div2=3$

八角形の内接



$x^2 = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos 45°$

$x^2 = 2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2 = 2 - \sqrt{2}$

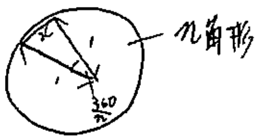
$x > 0$

$x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

円周は $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$

円周率 $= 8\sqrt{2-\sqrt{2}} \div 2$

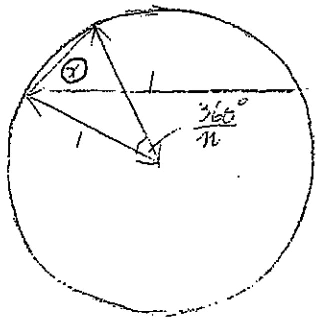
$= 4\sqrt{2-\sqrt{2}}$



$x^2 = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos \frac{360}{n}$

$x = \sqrt{2 - 2\cos \frac{360}{n}}$

円周率の計算



円周率を求めてみる。

円周率＝円周の長さ÷直径の長さ　で表される。

しかし、円周がわからないので、円に内接するn角形のまわりの長さを円周と考える。

ちなみにn角形の一辺の長さは $x=\sqrt{2-2\cos\frac{360^\circ}{n}}$ で求めることができる。

円に内接する正n角形の一辺を求めるには余弦定理を用いる

$x^2=1+1-2\times1\times1\times\cos\frac{360^\circ}{n}$

ここでは半径の長さを1とする。

nに数字をあてはめていくと・・・

n角形	中心角	n角形の1辺の長さ	n角形の周りの長さ＝円周	円周率
10	36	0.618033989	6.180339887	3.0901699
25	14.4	0.250666467	6.266661678	3.1333308
50	7.2	0.125581039	6.279051953	3.139526
75	4.8	0.083751307	6.281348059	3.140674
100	3.6	0.062821518	6.282151816	3.1410759
125	2.88	0.050260191	6.282523861	3.1412619
150	2.4	0.04188484	6.282725965	3.141363
175	2.057143	0.035901988	6.282847829	3.1414239
200	1.8	0.031414635	6.282926925	3.1414635
225	1.6	0.027924361	6.282981153	3.1414906
250	1.44	0.02513208	6.283019942	3.14151
275	1.309091	0.02284745	6.283048641	3.1415243
300	1.2	0.020943568	6.28307047	3.1415352
325	1.107692	0.019332577	6.283087457	3.1415437
350	1.028571	0.017951717	6.283100937	3.1415505
375	0.96	0.016754965	6.283111811	3.1415559
400	0.9	0.015707802	6.283120711	3.1415604
500	0.72	0.012566288	6.283143966	3.141572
1000	0.36	0.006283175	6.283174972	3.1415875
5000	0.072	0.001256637	6.283184894	3.1415924
10000	0.036	0.000628319	6.283185204	3.1415926
100000	0.0036	6.28319E-05	6.283185364	3.1415927

となる

以上の結果から、円周率は3．1415・・・・・・・・・・・・・・・・になることがわかった。
　これは、円に内接する正n角形を基準として、このnの中に数字をどんどん大きくして入れていくと、その正n角形は次第に円に近づいてくる。そして、それは限りなく円に近い図形になる。
　そうなると、その正n角形の周りの長さは、円周と考えることができる。
　というわけで、正n角形（nはかなり大きな数）の周りの長さを直径の長さで割って、でてきた数値は円周率とよぶことができるのである。

パソコン数学についての感想

この実験の最初の授業で、「積分とは読んで字のごとく、分けた物を積み上げるという意味です」というのを知りました。それまで僕は、積分という言葉を聞いたことしかなかったので、難しいものだと思っていました。しかしその意味を知ったとき、「実はそういうことだったのか」と、驚きました。

この積分という作業は、紀元前のアルキメデスの時代から利用されていたが、１６００年代にニュートンとライプニッツが、分けた物を積み上げるという積分を一瞬で計算できる定理を発見したらしい。それは「微分積分の基本定理」といって、高２で学ぶことなので、その「微分積分の基本定理」を学ぶ前に、１６００年代以前にアルキメデスらが使っていた地道な方法を身をもって体験しようというのが今回の実験だったのです。僕は何でも追及するのがすきなので、この実験はたのしみでした。

まず最初に、和の公式の復習というのをしました。これは、その公式がなぜそうなるのかを確認するためのものでした。方眼用紙に図形を描いたりして、和の公式を導き出したら、感動してしまいました。なぜかというと、すごく複雑な公式が、図形的に求めることによってすごく理解できたからです。これは僕にとって新たな発見となりました。

次に、２次関数とｘ軸で囲まれる面積を求めるという作業をしました。これはその面積を何等分かしないと、面積を求めることができなくて、しかも、かなり細かく等分しないと正確な答えがでないのです。これは、パソコンを使えばなんとかいけますが、それでも僕にはしんどかったです。

円錐の体積を求めるときに、なぜ３分の１をかけるかというのも実験しました。これが分かったときも感動してしまいました。しかしこれをパソコンなしで求めるのはむりでしょう。　極限というのも少し学べてよかったです。

そして最後に円周率を求めました。円に内接する正ｎ角形の周りの長さを円周と考えるのは、「そんな考え方があったのか」と驚きました。

これらの考えかたはとてもすばらしいのですが、やはりこの作業を地道にするのはしんどいです。普通に公式などを使った方が楽だと思います。しかし、公式を使うにしても、なぜそうなるかを知っていたほうが、納得して使えると思います。今回はそれを理解することができたのでよかったです。